TD_{16} – Isométries

Exercice 1 ★★

Déterminer la nature des transformations de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont les suivantes :

$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\2&2&-1\end{pmatrix}\qquad B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&-1\\-1&2&2\\2&-1&2\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

$$D=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2&-\sqrt{6}&\sqrt{6}\\\sqrt{6}&1&3\\-\sqrt{6}&3&1\end{pmatrix}\qquad E=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&-2&-1\\2&-1&-2\\-1&2&-2\end{pmatrix}\qquad F=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}-7&24\\24&7\end{pmatrix}$$

Exercice 2 ★★

Soit E un espace euclidien de dimension 3, muni d'une base orthonormée B. Déterminer les matrices dans la base B des endomorphismes suivants :

1. demi-tour d'axe u avec $u=(1,2,2)$;
2. rotation d'axe dirigé et orienté par $u=(1,1,1)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 3 ★★

1. Que peut-on dire d'une matrice carrée réelle à la fois symétrique et orthogonale ?
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$A=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2&6&-3\\6&3&2\\-3&2&6\end{pmatrix}.$$

Exercice 4 ★★★

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est :

$$A=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-1&-4&4&-4\\-4&5&2&-2\\4&2&5&2\\-4&-2&2&5\end{pmatrix}$$

1. Sans calculs, dire pourquoi f est diagonalisable dans une base orthonormée.
2. Montrer que f est une isométrie. En déduire les seules valeurs propres possibles pour f.
3. Sans calculer le polynôme caractéristique de f, déterminer à l'aide de la trace l'ordre de multiplicité des valeurs propres de f. En déduire le polynôme caractéristique de f.
4. Déterminer l'espace propre E_1 associé à la valeur propre 1. Donner une base orthonormée de E_1.
5. Montrer que l'espace propre E_{-1} associé à la valeur propre -1 satisfait $E_{-1}=(E_1)^{\perp}$. En utilisant l'équation caractérisant E_1, en déduire un vecteur générateur de E_{-1}.
6. Donner une base orthonormée dans laquelle la matrice de f est diagonale. Donner une interprétation géométrique de f.

Exercice 5 ★★★

Soit $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire habituel. Soit $\overrightarrow{w}\in\mathbb{R}^3$ et $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par :

$$\forall\overrightarrow{x}\in\mathbb{R}^3,\quad f(\overrightarrow{x})=a\overrightarrow{x}+b\langle\overrightarrow{w},\overrightarrow{x}\rangle\overrightarrow{w}+c(\overrightarrow{w}\wedge\overrightarrow{x}).$$

On suppose $\overrightarrow{w}$ de norme 1. Déterminer les triplets (a,b,c) réels pour lesquels f est une rotation.

Exercice 6 ★★

Soit A une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right| \leqslant n$.

On pourra penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice 7 ★★★

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E vérifiant

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(y)\rangle = 0$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in E, \qquad \|f(x)\| = \lambda \|x\|$$

On pourra commencer par montrer que si x et y sont unitaires, alors $\langle x+y, x-y\rangle = 0$.

Exercice 8 ★★★

Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $f \in \mathcal{O}(E)$, montrer que

$$f^2 = -\mathrm{Id}_E \iff [\forall x \in E\ ,\ \langle x, f(x)\rangle = 0]$$

Exercice 9 Caractérisation des matrices orthogonales ★★★

Dans cet exercice, $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle X, Y\rangle = X^\top Y$. Soit $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si P est orthogonale, alors $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|PX\| = \|X\|$.
2. Inversement, on suppose que pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|PX\| = \|X\|$.

   (a) Montrer que $\forall (X,Y) \in (\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, $\langle PX, PY\rangle = \langle X, Y\rangle$.

   (b) En déduire que P est orthogonale.

Exercice 10 ★★★

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$

On pose $\sigma = ab + bc + ca$ et $s = a + b + c$

1. Montrer que M est orthogonale si et seulement si $\sigma = 0$ et $s \in \{-1, 1\}$.
2. Montrer que $M \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $\sigma = 0$ et $s = 1$
3. Montrer que $M \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $k \in \left[0, \dfrac{4}{27}\right]$ tel que a, b et c sont les racines de $X^3 - X^2 + k$

Exercice 11 ★★★

Diagonaliser en base orthonormale les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 12 Décomposition polaire ★★★★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une matrice symétrique R telle que $R^2 = A^\top A$.

2. On suppose A inversible. Montrer que la matrice R trouvée à la question précédente est inversible.
3. Montrer que pour tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice symétrique S et une matrice $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = QS$.
   On pourra raisonner par analyse-synthèse en cherchant une condition nécessaire sur S.

Exercice 13 Théorème de Mazur-Ulam ★★★★★

Soit E un espace euclidien et f une application de E dans E telle que $f(0) = 0$ et, pour tout $(x, y) \in E^2$ $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

On souhaite montrer qu'alors f est une isométrie.

1. Montrer que, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$
2. Montrer que, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$
3. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormée de E, montrer qu'alors $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E.
4. En utilisant la base orthonormée $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ montrer que f est linéaire
5. Conclure

Exercices issus d'oraux

Exercice 14 ★★★

(*Oral 2019*)

Soit $M \in \mathcal{O}_4(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = M - I_4$ et soit f l'endomorphisme canoniquement associé

1. Calculer M^3, en déduire que f est une isométrie positive.
2. Donner les valeurs propres complexes de M avec leur multiplicité
3. Soit $X = X_1 + iX_2$ un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ avec X_1 et X_2 deux matrices de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et soit x_1 et x_2 les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associés à X_1 et X_2
   (a) Montrer que $P = \mathrm{Vect}(x_1, x_2)$ est un plan stable par f
   (b) En déduire que $P^\perp$ est un plan stable par f
   (c) Montrer qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est de la forme par blocs $\begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & R_{-\theta} \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$ où θ est à préciser.

Exercice 15 ★★★

(*Oral 2017, 2019*)

On se place dans $\mathbb{R}^3$. Soit r une rotation d'axe D avec $r \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et soit s une symétrie orthogonale par rapport à un plan P

1. On suppose que P et D sont orthogonaux, montrer que $r \circ s = s \circ r$
2. On suppose que $r \circ s = s \circ r$. Que peut-on alors dire de D et P ?

Exercice 16 ★★

(*Oral 2019*)

Soit $A = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est une matrice orthogonale
2. Que dire des valeurs propres de A ? Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Exercice 17 ★★

(*Oral 2012*)

Soit $R = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & a \\ -1 & 2 & b \\ -2 & 1 & c \end{pmatrix}$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que R soit la matrice d'une rotation. Trouver alors a, b et c
2. Caractériser cette rotation
3. Déterminer l'image du plan d'équation $x + 2y - z = 0$ par la rotation.

Exercice 18 ★★

(*Oral 2023*)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien E et u l'endomorphisme défini par

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \quad u(e_i) = e_{i+1} \quad \text{et} \quad u(e_n) = e_1$$

1. (a) Écrire la matrice A de u dans $\mathcal{B}$
   (b) Montrer que u est une isométrie.
   (c) Montrer que u est inversible, déterminer son inverse et son déterminant.
2. On pose, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\omega_k = \exp\left(\dfrac{2ik\pi}{n}\right)$ et $U_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \omega_k^2 \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que U_k est un vecteur propre de A.
   (b) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donner son polynôme caractéristique.
3. Pour $n = 3$ déterminer la nature de l'isométrie u.